

DOI: 10.7652/xjtuxb201902016

面向流体机械仿真的层次化并行计算模型

肖兮, 刘闯, 何锋, 张琼, 张兴军, 董小社

(西安交通大学电子与信息工程学院, 710049, 西安)

摘要: 随着流体机械基础并行算法的发展,传统的单核处理器已经不能很好地满足先进流体机械研发的技术需求,为此本文深入研究了流体机械的物理模型以及高性能计算机架构特点,设计并实现了能够充分表达物理模型并行性的高效的面向流体机械仿真的层次化并行计算模型(HP2H)。HP2H 模型充分考虑流体机械的多层几何结构以及高性能计算机的多层逻辑架构,深入挖掘计算平台、计算模型以及物理模型的并行性,实现从物理模型到计算资源的高效任务映射。依据具体的轴流压气机转子数值模拟的实际应用背景,结合粗粒度并行和细粒度并行对模型进行实现。对 HP2H 计算模型进行了功能测试和性能测试,当计算核心从 36 核提升到 432 核时,计算性能提升约 12 倍,并行效率达到了 100%。实验结果表明,HP2H 计算模型不但在正确地对流体机械进行数值模拟的前提下实现了较好的计算性能,并且由于 HP2H 计算模型结合了粗粒度并行与细粒度并行,因而可以在不同的计算平台上运行,还可以便捷地实现计算规模的扩展,具有良好的可移植性与可扩展性。

关键词: 流体机械;粗粒度并行;细粒度并行;并行计算模型

中图分类号: TP338.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2019)02-0121-07

Design and Implementation of a Parallel Computing Model for Fluid Machinery

XIAO Xi, LIU Chuang, HE Feng, ZHANG Qiong, ZHANG Xingjun, DONG Xiaoshe

(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: The traditional single-core processor can not meet the technical requirements of advanced fluid machinery research and development with researches on the basic parallel algorithms of fluid machine, while the rapid development of high-performance computer provides a solution. Physical models of fluid machinery and the architecture of high-performance computers are deeply studied, and an efficient parallel computing model (HP2H) that can fully express the parallelism of the physical model is designed. HP2H takes fully account of multi-layer geometry of a fluid machinery and multi-layered logic architecture of a high-performance computer. Moreover, HP2H deeply exploits the parallelism of computing platforms, computing models and physical models to achieve efficient task mappings from physical models to computing resources. According to the actual application background of the numerical simulation of axial-flow compressor rotors, the model is parallelly implemented with coarse-grained parallelism and fine-grained parallelism. Functional tests and performance tests are performed on HP2H

收稿日期: 2018-06-25。 作者简介: 肖兮(1995—),男,硕士生;董小社(通信作者),男,教授,博士生导师。 基金项目: 国家“十三五”重点研发计划资助项目(2016YFB0200902);国家自然科学基金资助项目(61572394)。

网络出版时间: 2018-12-18

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20181214.0859.004.html>

computing model. Results show that when the computing core is upgraded from 36 cores to 432 cores, the computational performance increases by 12 times and the parallel efficiency achieves 100%. Experimental results show that HP2H achieves a good computing performance under the premise of correctly implementing the numerical simulation of the turbomachinery. It is the use of coarse-grained parallelism and fine-grained parallelism, HP2H can run on different computing platforms and easily realize the expansion of computing scale, which means that the HP2H computing model has a good portability and scalability.

Keywords: fluid machinery; coarse-grained parallelism; fine-grained parallelism; parallel computing model

流体机械广泛应用于国防军事、航空航天、重工业、能源动力等国家支柱性行业,在国民经济中占据重要地位,但与此同时又消耗着全国总工业 30%~40%的用电量^[1-2]。随着流体机械高效率、高精度、高扩展性基础并行算法的发展^[3-5],传统的单核处理器已经不能很好地满足先进流体机械研发的技术需求,针对具体的应用背景开发适用于高性能计算的软件是现今面对的重大挑战。

Hart 等采用 MPI 和 OpenACC 来求解计算流体力学(CFD)问题,先后用 OpenACC 加速了不可压缩方腔的 CFD 代码,以及更为复杂的模拟空气流动的 CFD 代码,并实现了两个数量级的性能提升^[6]。Sivanandan 等分别采用 MPI、OpenMP 和 CUDA 的并行编程方式扩展有限差分法(FDM)来求解稳态热传导方程^[7]。Loncar 等设计并实现了通过虚拟或实时传播计算稳态和非稳态解的 Gross-Pitaevskii 方程两级问题在一维、二维以及三维空间的并行解决方案,方案根据并行化的类型分为 3 个程序包,分别是 OpenMP、OpenMP/MPI 以及 CUDA/MPI/OpenMP 版本^[8]。Jacobsen 等提出了在异构多 GPU 集群上 Navier-Stokes 方程的两层并行实现来模拟浮力驱动不可压缩的方腔内流体流动,采用 NVIDIA 的 CUDA 编程模型对每个 GPU 内的细粒度数据进行并行操作,MPI 用于整个集群粗粒度并行化,研究结果表明,多 GPU 集群可以显著加速 CFD 模拟过程^[9]。

此外,刘冰等结合 NVIDIA GPU 计算平台,从数值计算和并行计算两个方面对基于自主研发的 Navier-Stokes 解算器进行加速,达到双精度计算 45 倍以上的加速比^[10]。胡银丰等将高性能并行计算技术应用于现代声纳信号处理,采用 MPI + OpenMP 的混合编程方法为相关海量数据实时处理以及复杂算法的实现提供了技术支撑^[11]。李春在胶州湾水质预报系统中应用 MPI + OpenMP 混合

并行计算技术,并对比纯 MPI 非阻塞模式并行的水质模块,发现混合模型在并行扩展以及资源利用方面优势显著,提高了在多核集群系统上的运算效率^[12]。

本文基于上述背景设计了面向流体机械仿真的层次化并行计算模型(HP2H),该模型充分考虑流体机械的多层几何结构以及高性能计算机的多层逻辑架构,深入挖掘计算平台、计算模型以及物理模型的并行性,实现从物理模型到计算资源的高效任务映射。

1 HP2H 并行计算模型

大型流体机械具有多样机、多叶片排、多叶道、多区域、多维的多层几何结构,而高性能计算机也有系统、机柜、节点、处理器核、专用加速众核的多层逻辑架构。结合项目背景,本文的目标是将大型流体机械真实流动应用特征和高性能计算机系统架构特征相结合,根据大规模应用的特点,通过合理的任务划分使高性能计算机系统各计算核高效协同地进行并行计算,并通过提高数据局部性以执行更高级别的细粒度并行任务,充分利用计算资源。本文设计结合 MPI、OpenMP 和专用加速设备编程方法的 HP2H 计算模型,充分利用并行计算平台节点间、节点内处理器之间、处理器内计算核之间多级并行,开发流体机械应用的任务级和数据级并行性。

HP2H 模型的两个主要特点是“分层并行、混合异构”,接下来从这两个角度介绍 HP2H 模型。

1.1 多层次任务划分与并行

流体机械的全部计算任务具有多个层次的并行性,本文结合目标计算体系结构的特点,将轴流压气机转子模拟的计算任务分解为多个层次。流体机械一般是由多个结构类似的叶片排组成,在进行多级多叶道流场数值模拟时,可以采用分层几何区域分解^[13]的方法对流体机械整机进行分解,采用 3 个层

次的分解实现流体机械多叶排或全叶排流场的子区域划分。首先,将流体机械整机流场区域按照物理结构划分为若干个叶片排,然后将每一个叶片排划分为单个叶道,最后在叶道上进行网格划分,并在叶道以及叶片排的周期性边界处完成相互对接,继而得到全叶片排流动区域的网格剖分。

相应地,高性能计算机中的异构协同计算集群也可以划分成 3 个并行层次:节点级并行、节点内 CPU 与加速核异构并行以及计算核内并行。节点级并行最主要的问题是计算任务的划分。为了保证正确性和并行性的前提下减少通信量,本文的应用背景采用按叶片排划分的方法划分计算量,既保证了物理上划分的独立性,也使得通信量对并行性的影响最小。节点内部并行的主要问题是通用核和加速核的协同计算,重点是任务分配以及通用核和加速核之间的数据传输。加速核适用于处理计算密集任务,因此程序设计时需要尽量将程序中的计算密集任务分配到加速核中执行,在此基础上,为了充分发挥通用核的计算性能,除了逻辑事务外,还可以将一部分计算任务放在通用核上,使通用核和加速核更好地协同工作,从而保证系统资源的充分利用。当并行计算的逻辑模型和底层机器架构可以很好地适配时,才可以得到较高的计算效率。流体机械计算任务的多层次并行和高性能计算机的多个并行层次相互对应,为二者之间的任务映射提供了有利的条件。HP2H 模型的物理模型与计算平台的映射方案如图 1 所示。

1.2 混合异构编程模式

目前,以异构多核为特征的新型高性能计算机系统结构已成为构造高效能计算机系统的主要技术,并且得到了广泛应用。为了适应这种异构多核的新型高性能计算机系统结构,本文的 HP2H 并行计算模型采用“混合异构”的编程方式。

“混合异构”中的异构主要指节点间的异构和节点内主处理器和协处理器的异构,其中,主处理器一

般负责逻辑事务处理,协处理器负责计算密集型任务的计算。该模型主要利用不同的并行接口解决不同层面上的并行问题,从而充分利用系统中异构的计算资源提高并行效率。HP2H 模型采用三层合作编程框架(TLCF)^[14],利用该编程架构进程、重量级线程以及轻量级线程的三层混合异构协同并行的特点,并结合 MPI+OpenMP+CUDA 编程方案,实现面向流体机械的混合异构并行计算模型总体设计。

HP2H 模型采用 MPI+OpenMP+CUDA 混合异构并行编程模式实现多级并行。在节点级采用消息传递模型,通过合理的计算域划分在保证并行性的同时减少通信;在节点内部采用 OpenMP+CUDA 异构并行编程方法,OpenMP 负责处理逻辑事务和部分计算,充分发挥了节点上通用核的性能,CUDA 被通用核调度处理计算密集任务。并且,针对不同的并行计算平台,HP2H 模型可以演变成不同的版本,主要包括 MPI、MPI+CUDA、MPI+OpenMP 等不同版本的求解器。HP2H 模型为有加速设备的计算平台预留加速接口的同时,又保证同构多核系统的并行执行效率,使开发的程序具有较好的可移植性。

整个计算过程是首先将计算任务通过消息传递方式划分为子任务,并映射到节点上由 MPI 进程执行,然后在每个节点内部将子任务分配到多核处理器的 CPU,并且通过 OpenMP 并行,在每个 CPU 中创建线程以及调用该节点上的 GPU 进行并行计算。

总体而言,HP2H 充分利用消息传递、共享存储以及加速核的特点,结合采用数据并行化、线程并行化以及任务并行化,从多种并行粒度优化了程序的性能。也就是说,HP2H 模型充分利用节点间并行和节点内并行,为集群系统提供了一种更有效的并行方式,从任务划分及任务到计算单元的映射层面为实现并行软件可扩展性提供支撑。此外,HP2H 模型在流体力学中的应用也为该领域问题

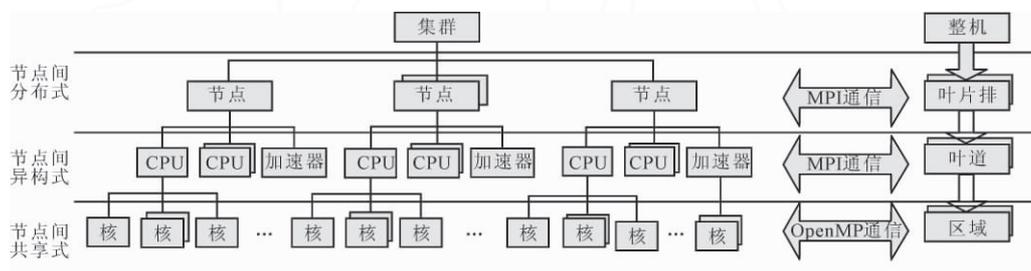


图 1 物理模型与计算平台映射方案图

的解决提供了新的思路。

2 轴流压气机算例

轴流压气机转子数值模拟算法^[15]是流体力学经典算例,对该算例的研究和分析不仅有助于深入了解转子内部复杂的流动现象,还可以为评估商业计算流体力学软件和自主开发程序提供重要依据。

CFD 的核心内容就是将物理问题抽象成方程组,然后对方程组进行求解。轴流压气机转子数值模拟算法^[15]选取显式 R-K 时间推进法针对轴流压气机转子数值模拟进行研究,并且为了提高算法精度和算法效率,构造了冗余项并采用了一些加速收敛方法。R-K 法通过构造显式人工黏性的方法消除数值振荡现象,同时利用多重网格法^[16-17]、局部时间步长法、隐式残差光滑等方法加大时间步长、加快收敛速度。

轴流压气机转子数值模拟的核心计算过程是多重网格法,多重网格法的计算过程抽象为迭代、限制、插值和再迭代的循环迭代过程。计算过程如图 2 所示。

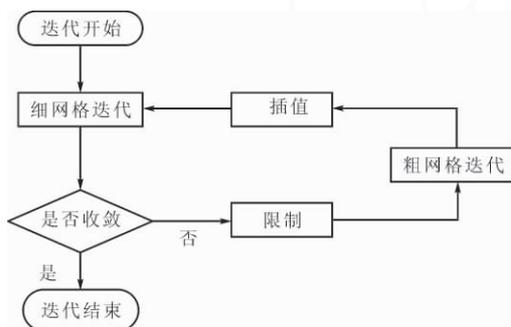


图 2 多重网格方法的计算过程

本文选择的是三层网格法(FMG)循环方式,分别在粗、中、细网格层上进行迭代。

3 HP2H 模型实现

本文在天河二号上进行测试,首先结合 MPI 编程模型实现 HP2H 模型粗粒度的并行计算,同时为了更进一步挖掘计算节点多核的特性,实现 HP2H 模型的 MPI+OpenMP 的混合并行计算,接着考虑到高性能计算平台的异构节点,完成 GPU 对 HP2H 计算模型的加速。

3.1 MPI 进程级并行实现

本文实现了轴流压气机转子全叶排数值模拟算法^[15],整圈的叶排包含 36 个叶道,每个进程模拟一个叶道,模拟过程中进程间的通信主要采用两种方

式:与相邻叶道进程的通信(进程间级别相等)以及所有叶道残差数据规约时的通信(进程有主从之分)。在模拟时,每个进程单独进行计算,仅当各进程间需要通信时才传递消息。HP2H 模型采用 SPMD 的 MPI 程序设计模式。

多重网格方法中,采用的粗、中、细网格层迭代步数分别为 50、50、10 000。因为叶轮数值模拟的精度是由选定的数值方法以及采取的加速收敛的方法所决定的,因此计算的残差并不随计算平台的改变而改变,具有平台无关性。本节分别对全叶排划分为 36 个叶道区域以及对叶道区域进一步划分为 12 个子区域的数值模拟进行测试。当全叶排划分为 36 个叶道时,用 36 个计算核进行测试,当进一步划分为 432 个子并行区域时,用 432 个计算核进行数值模拟。实验测得的残差随计算迭代步数的收敛情况如图 3 所示。

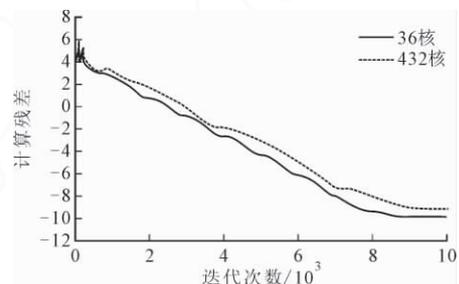


图 3 轴流压气机全叶排计算残差收敛图

从图 3 可以看出,两条曲线虽然稍微有波动,但残差都是减小的,曲线的波动是由于 HP2H 模型的轴流压气机数值模拟采用的多重网格法在各个网格层的迭代产生的。图 3 显示迭代步数到达 9 000 步左右时,两种计算规模的残差都基本收敛于-10 左右,但是二者又有所差别,相对于 36 核的版本,由于计算精度的提高 432 核版本残差收敛速度也相对受到影响,但整体还是收敛的。流体机械的残差收敛意味着 HP2H 计算模型的正确性。同时,对输出文件用后处理软件 Tecplot 进行处理,得到 36 核版本以及 432 核版本的马赫数模拟结果,如图 4 所示。图 4 所呈现的模拟结果与实际物理模型一致,再一次证明了 HP2H 计算模型的正确性。

在保证模拟结果正确性的前提下,对 HP2H 模型的 MPI 版本的运行时间进行测试。HP2H 模型的 MPI 版本将整个计算域分为 36 个计算区域,用 36 核进行并行计算。HP2H 模型采用的多重网格法在粗、中、细每一网格层的每次迭代时间大致相同,而整个程序在天河二号上运行结束需要 20 h,

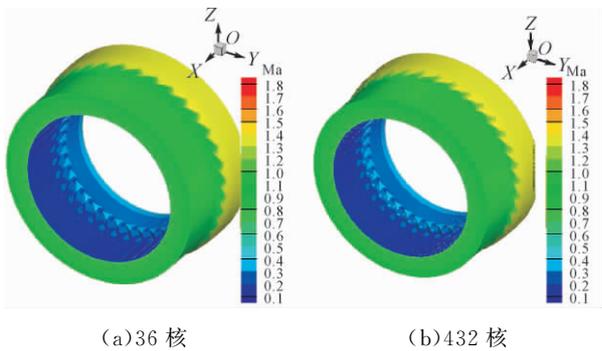


图 4 流场 36 核与 432 核的马赫数模拟图

因此将多重网格迭代次数设置为 50、50、1 000,并分别对每一网格层的迭代时间进行统计,结果见表 1。

表 1 MPI 模拟程序各层网格单步运行时间

网格层	单步运行时间/s
粗网格	0.074
中网格	0.722
细网格	9.343

从表 1 可以看出,轴流压气机程序的主要计算量集中在细网格层,这是因为在细网格层需要进行三层网格的“V 循环”,计算量较大。

3.2 MPI+OpenMP 并行实现

在 HP2H 模型的 MPI 版本的基础上进行 OpenMP 并行测试。考虑到各个网格层每次迭代的时间都基本稳定,因此粗中细网格层分别采用 50、50、100 的迭代次数进行基本趋势测试。

3.2.1 粗粒度并行测试 由于 OpenMP 的任务级并行以及数据级并行都属于细粒度并行,都可以在不改变程序结构的基础上通过添加编译指导语句实现并行化,因此统一进行测试。

实验依旧由 36 个进程模拟全叶排,每个进程计算一个叶道,进程之间通过 MPI 进行通信,并在进程内部进行细粒度 OpenMP 并行,通过调整 OpenMP 的线程数进行对比测试。在天河二号上进行测试的实验结果如图 5 所示。

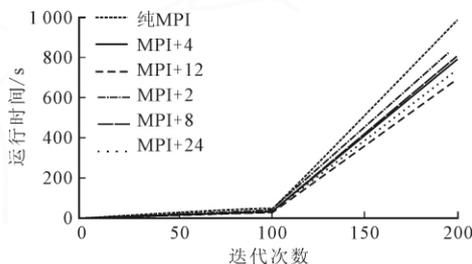


图 5 MPI+不同线程数 OpenMP 程序运行时间对比

由图 5 可以看出,不同线程数情况下计算耗时不同,但都比 MPI 版本程序性能有所提升,特别是当线程数为 12(即计算规模为 432 核)时,性能最优。天河二号的节点是分布式存储,节点之间通过定制的高速互连网络相连,每一个节点是双路 12 核 CPU 结构,所以当在一个节点分配两个进程,且每个进程创建 12 个线程并行执行任务时,计算性能最好。此外,4 线程(即计算规模为 144 核)和 8 线程(即计算规模为 288 核)时的时间曲线是基本重合的,分析原因可能是因为 8 线程时每个节点分配 3 个进程,其中一个进程的线程属于两个 socket,增加了通信的开销。与之类似,如果每个进程分配 24 个线程(即计算规模为 864 核)时,则每个进程的线程不在同一个 socket 上(线程数大于 12),计算开销明显增大,性能低于 12 线程版本。

对 MPI 程序与 MPI+12 线程 OpenMP 的性能进行详细对比,如图 6 所示。图 6 表明给计算每一个叶道的进程分别创建 12 个线程执行任务时,各个网格层的执行性能都有明显的提升,当 200 次迭代执行完时,纯 MPI 程序的执行时间为 981.052 s, MPI+12 线程 OpenMP 的执行时间则为 692.241 s,性能提高了 29.44%。可见,MPI+OpenMP 与高性能计算平台节点间通过网络互连、节点内共享内存的架构相符合,充分利用了计算平台的计算资源,并深入挖掘了 HP2H 模型的可并行性。

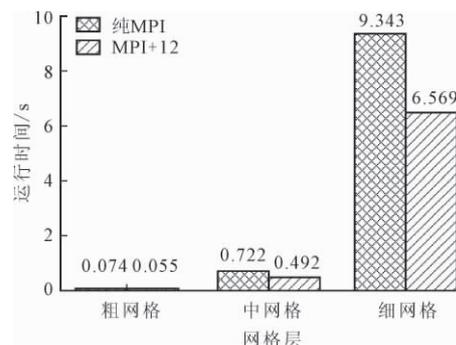


图 6 MPI 程序与 MPI+12 线程 OpenMP 运行时间对比

3.2.2 细粒度并行测试 HP2H 模型的 OpenMP 粗粒度 SPMD 并行,将每个叶道细分为 12 个并行子区域,由进程创建线程并行执行,计算规模为 432 核,重点测试模型的可扩展性,因为将轴流压气机全叶排的计算任务划分成 432 个子并行区域,因此只要设置的进程数与创建的线程数的乘积为 432,则在理论上都是可以执行的。由于所需要的核数确定,因此每次实现均需分配 18 个节点,测试结果如图 7 所示,图中 mn 代表 m 个进程和 n 个线程的

组合。

从图7可以看出,当进程数为36、线程数为12时,程序的执行时间最少,此时天河二号的18个计算节点上,每个节点执行2个进程,每个进程创建12个线程运行在属于同一个socket的12个核内,充分利用了计算节点的NUMA架构。此时,432核程序的运行时间为80.379 s,是36核MPI进程运行时间981.052 s的1/12,基本实现了线性加速,并行效率达到100%。

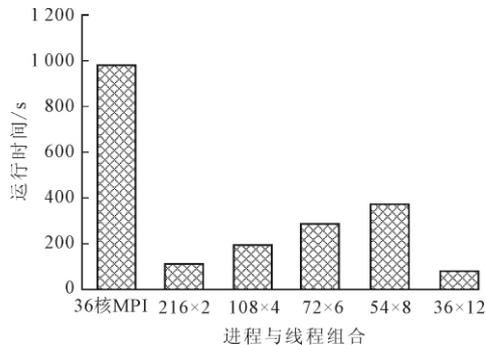


图7 MPI+OpenMP程序的扩展性分析

此外,分析图7中运行时间的趋势发现,运行时间与线程数并不是简单地呈现出线性关系,这是由于每一个计算单元都需要和相邻的6个计算单元进行通信,如果需要通信的线程分配在别的进程以及节点上,就会增加节点之间的通信开销,因此,再一次证明了只有当计算模型和物理模型相匹配才能达到最佳的计算性能。

3.3 MPI+OpenMP+CUDA 并行实现

在国家高性能计算中心(西安)的GPU集群上进行测试,将R-K时间推进法中人工黏性项的计算发送到GPU上,与CPU上的净对流通量和黏性通量的计算并行执行。本节的测试程序采用36核MPI版本,粗、中、细网格层的迭代次数分别设置为50、50、200,实验结果如图8所示。

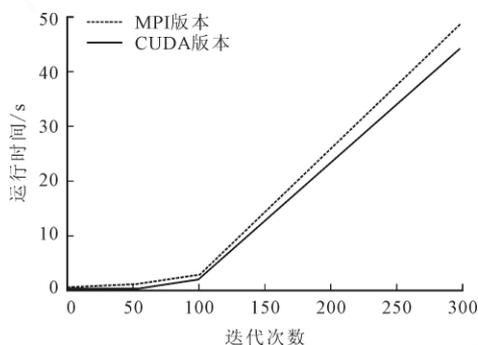


图8 MPI版本与CUDA版本程序的运行时间对比

从图8可以看出,CUDA版本的程序比MPI版

本的程序计算性能稍有提升,其中各网格层的计算时间对比见表2。

表2 MPI版本与CUDA版本程序在各网格层的运行时间对比

网格层	运行时间/s	
	MPI版本	CUDA版本
粗网格	10.915	10.634
中网格	42.190	40.171
细网格	248.136	223.903

从表2可以看出,在当前计算平台上,CUDA版本在粗网格和中网格上比MPI版本稍有提高,但效果不明显,而在细网格上,由于计算量的增加,计算时间比原始版本提高了9.8%。

4 结论

本文提出的面向流体机械的HP2H计算模型综合考虑了计算平台的机器架构以及流体机械的物理模型的特点,并结合MPI、OpenMP以及CUDA的编程,充分挖掘了计算平台与物理模型的并行性。通过对轴流压气机转子的数值模拟的实验结果,验证了模型采用36核并行和432核并程序的正确性,以及可以在充分利用硬件资源的基础上,挖掘物理模型、计算模型以及计算平台的并行性,并获得了较好的性能。

参考文献:

- [1] 国家自然科学基金委员会. 工程热物理与能源利用学科发展战略研究报告[R]. 北京: 科学出版社, 2011: 72-75.
 - [2] 中国科学技术协会. 2009—2010工程热物理学科发展报告[R]. 北京: 中国科学技术出版社, 2010: 24-45.
 - [3] GICQUEL L Y M, GOURDAIN N, BOUSSUGE J F, et al. High performance parallel computing of flows in complex geometries [J]. *Comptes Rendus Mecanique*, 2011, 339(2/3): 104-124.
 - [4] GILES M B, REGULY I. Trends in high-performance computing for engineering calculations [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 2014, 372(2022): 319-332.
 - [5] 王运涛, 王光学, 徐庆新, 等. 基于结构网格的大规模并行计算研究 [J]. *计算机工程与科学*, 2012, 34(8): 63-68.
- WANG Yuntao, WANG Guangxue, XU Qingxin, et al. A study of the massively parallel computation based

- on structured grids [J]. *Computer Engineering and Science*, 2012, 34(8): 63-68.
- [6] HART A, ANSALONI R, GRAY A. Porting and scaling OpenACC applications on massively-parallel, GPU-accelerated supercomputers [J]. *European Physical Journal Special Topics*, 2012, 210(1): 5-16.
- [7] SIVANANDAN V, KUMAR V, MEHER S. Designing a parallel algorithm for heat conduction using MPI, OpenMP and CUDA [J]. *Parallel Computing Technologiess*, 2015: 1-7.
- [8] LONCAR V, YOUNG-S L E, SKRBIC S, et al. OpenMP, OpenMP/MPI, and CUDA/MPI C programs for solving the time-dependent dipolar Gross-Pitaevskii equation [J]. *Computer Physics Communications*, 2016, 209: 190-196.
- [9] JACOBSEN D A, THIBAUTY J C, SENOCAK I. An MPI-CUDA implementation for massively parallel incompressible flow computations on multi-GPU clusters [C] // *Proceedings of the 48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*. Reston, VA, USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 2010: 0522.
- [10] 刘冰, 陆忠华, 李新亮, 等. 基于 GPU 的多重网格 Navier-Stokes 解算器并行优化方法研究 [J]. *科研信息化技术与应用*, 2013, 4(3): 56-67.
LIU Bing, LU Zhonghua, LI Xinliang, et al. Implementation and optimization of a Navier-Stokes solver with multigrid methodology based on GPU [J]. *E-Science Technology and Application*, 2013, 4(3): 56-67.
- [11] 胡银丰, 孔强. 基于 MPI+OpenMP 混合编程模型的并行声纳信号处理技术研究 [J]. *舰船电子工程*, 2017, 37(12): 130-133.
HU Yinfeng, KONG Qiang. Research on parallel sonar signal processing technology based on MPI + OpenMP mixed programming model [J]. *Ship Electronic Engineering*, 2017, 37(12): 130-133.
- [12] 李春. 混合并行计算在海洋水质预报系统中的应用研究 [D]. 石家庄: 河北工程大学, 2014: 36-50.
- [13] HAH C, KRAIN H. Secondary flows and vortex motion in a high-efficiency backswept impeller at design and off-design conditions [J]. *Journal of Turbomachinery*, 112(1): 7-13.
- [14] 曹维. 大规模 CFD 高效 CPU/GPU 异构并行计算关键技术研究 [D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2014: 39-50.
- [15] 张楚华, 琚亚平. 流体机械内流理论与计算 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2016: 129-145.
- [16] 刘超群. 多重网格法及其在计算流体力学中的应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1995: 1-49.
- [17] TAI C H, ZHAO Y, LIEW K M. Parallel-multigrid computation of unsteady incompressible viscous flows using a matrix-free implicit method and high-resolution characteristics-based scheme [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(36): 3949-3983.

(编辑 武红江)

(上接第 15 页)

- [15] STOYANOV H, BROCHU P, NIU Xiaofan, et al. Long lifetime, fault-tolerant freestanding actuators based on a silicone dielectric elastomer and self-clearing carbon nanotube compliant electrodes [J]. *RSC Advances*, 2013, 3(7): 2272-2278.
- [16] CHEN S E, HE Z C, LI E. Comparisons between the dynamic and quasi-static performances of a dissipative dielectric elastomer under pure shear mode [J]. *Smart Materials and Structures*, 2017, 26(10): 105044.
- [17] LI Bo, LIU Xuejing, LIU Lei, et al. Voltage-induced crumpling of a dielectric membrane [J]. *Europhysics Letters*, 2015, 112(5): 56004.
- [18] SUO Zhigang. Theory of dielectric elastomers [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2010, 23(6): 549-578.
- [19] CHEN S E, DENG L, HE Z C, et al. Temperature effect on the performance of a dissipative dielectric elastomer generator with failure modes [J]. *Smart Materials and Structures*, 2016, 25(5): 055017.

(编辑 武红江)